898. regularly convex set ニ就テ

吉田　耕作（阪大）

Banach 空間Eノ共軛空間$\bar{E}$内ノ集合 K ガ regularly convex デアルト云フノハ、任意ノ$f_0 \in K$ニ對シテ$x_0 \in E$ガ存在シテ、$\boxed{\sup_{f \in K} f(x_0) < f_0(x_0)}$ ノ成立ツコトデアル。定義カラ容易ニワカルヤウニ斯ルKハ convex デナケレバナラナイ。実ハ regularly convex ナル概念ヲ導入シタ。Krein ト $\hat{S}$mulyan[1] ハ

定理　$\bar{E}$ノ convex ナ集合Kガ reg. convex ナタメノ必要且ツ充分ナ條件ハKガ functional トシテノ weak topology デ閉ヂテ居ルコトデアル。

ヲ証明シテ居ル。尤モ之ノ二人ハ「transfinitely closed」ト云フ言葉ヲ使ツテ居ルガ同ジコトデアル。

以下ニハEノ（強）開凸集合ト$\bar{E}$ノ reg. convex ナ集合トノ間ニアル「duality」ノ存スルコトヲ注意シタイ

(1) Ann. of Math. 41, 3 (1940)

ト思フ。之ノ注意ヲスレバ幾何學的ナ意味ガワカルヤウニ思フ。

$\boxed{1}$ Eノ集合 X ニ對シテ，全テノ $x \in X$ ニ於テ $f(x) \leqq 1$ ナル如キ $f \in \overline{E}$ 全体ノ集合ヲ X^*。$\overline{E}$ ノ集合 Y ニ對シテ，全テノ $f \in Y$ ニ於テ $f(x) \leqq 1$ ナル如キ $x \in E$ 全体ノ集合ヲ Y'。ト置ク。

然ラバ　$X^{*'*} = X^*$，$Y'^{*'} = Y'$

證明．$X \leqq X^{*'}$，$Y \leqq Y'^*$。且ツ $X_1 \geqq X_2$，$Y_1 \geqq Y_2$ ナラ $X_1^{*'} \geqq X_2^{*'}$，$Y_1'^* \geqq Y_2'^*$ カラ明カ。

$\boxed{2}$ $X^{*'}$ ハ X ノ点ト0カラ張ラレル凸集合 $\mathrm{conv}(X, 0)$ ノ（強）閉被 $\overline{\mathrm{conv}(X, 0)}$ デアル。又0ヲ含ムEノ（強）閉凸集合 X ハ $X^{*'} = X$ ヲ満足スル。

證明．定義カラ明ニ $X^{*'} \geqq \overline{\mathrm{conv}(X, 0)}$．ヨツテ若シ $x_0 \in X^{*'} - \overline{\mathrm{conv}(X, 0)}$ トスルト，Ascoli-Mazur ノ定理(1)ニヨツテ $f_0(x_0) > 1$ 且ツ $x \in \overline{\mathrm{conv}(X, 0)}$ ナラ $f_0(x) \leqq 1$ ナル如キ $f_0 \in \overline{E}$ ガ存在スル。然ラバ $f_0 \in X^*$ デアリ，従ツテ $x_0 \overline{\in} X^{*'}$ トナリ矛盾デアル。後ノ部分ノ證明モ同様ニシテ得ラレル。

$\boxed{3}$ Y'^* ハ Y ノ点ト0カラ張ラレル凸集合 $\mathrm{conv}(Y, 0)$ ノ（functional トシテノ weak topology

---

(1) *Über konvexe Mengen in linearen normierten Räuemen. Stud. Math. 4.*

ニヨル）閉被 $\overline{\mathrm{conv}(Y, 0)}$ デアル。又 0 ヲ含ム $\bar{E}$ ノ（$f.w.t.$）閉凸集合 Y ハ $Y'^{*} = Y$ ヲ満足スル。

証明. 定義カラ明ニ $Y'^{*} \geqq \overline{\mathrm{conv}(Y, 0)}$. ヨッテ若シ $f_0 \in Y'^{*} - \overline{\mathrm{conv}(Y, 0)}$ トスルト, $\varepsilon > 0$ 及ビ $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n \in E$ ガ存在シテ, 凡テノ $f \in \overline{\mathrm{conv.}(Y, 0)}$ ニ對シテ

$$\max_{1 \leqq i \leqq n} |f(x_i) - f_0(x_i)| > \varepsilon$$

従ッテ n 次元ユークリッド空間ノ点 $\xi_0 = (f_0(x_1), f_0(x_2), \cdots\cdots, f_0(x_n))$ ハ $\xi_f = (f(x_1), f(x_2), \cdots\cdots, f(x_n))$, $f \in \overline{\mathrm{conv.}(Y, 0)}$ ノ何レカラモ距離 $> \varepsilon$. f ガ $\overline{\mathrm{conv.}(Y, 0)}$ ヲ動クトキ ξ_f ハ n 次元ノ空间内デ凸集合ヲ作ル. ヨッテ Ascoli-Mazur ノ定理（有限次元ノ場合ノ）デ実数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$ ガ存在シテ,

$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_0(x_i) > 1$ 且ッ全テノ $f \in \overline{\mathrm{conv}(Y, 0)}$ ニ對シテ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \leqq 1$. 其所デ $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in E$ ハ明ニ Y' ノ点デアル。ヨッテ $f_0 \bar{\in} Y'^{*}$ ナル矛盾ヲ得ル。最後ノ部分ノ証明ハ同様ニシテ得ラレル。

$\boxed{4}$ 上カラ 0 ヲ含ム reg. convex set Y ハ X^{*} ノ形ナルコト及ビ其ノ逆ガワカッタ。又一般ノ reg. convex set Y カラ conv（Y, 0）ヲ作ルト X^{*} ノ形ニナル事及ビ其逆モワカッタ。

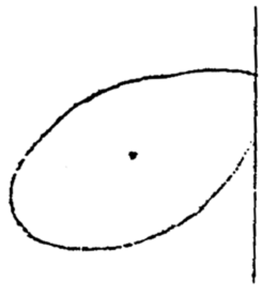
$\boxed{5}$ *reg. convex set* $X^{*'}$ガEニ於ケル有界集合ナルコトト、Eノ(強)閉凸集合$X^{*'}$ガ0ヲ内点ニスルコトトハ同等デアル。

証明. X^*ガ有界集合ニシテ且ツ$X^{*'}$ガ0ヲ内点ニシナイトスル。然ラバ$\|f\| \leqq \alpha$ for $f \in X^*$, 且ツ$x_i \bar{\in} X^{*'}$ニシテ$\lim_{i \to \infty} \|x_i\| = 0$ナル点列$\{x_i\} \subseteqq E$ガ存在スル: $|f(x_i)| \leqq \|f\| \cdot \|x_i\| \leqq \alpha \|x_i\|$カラ之レハ矛盾デアル。次ニ$X^{*'}$ガ球$\|x\| \leqq \beta$, $\beta > 0$ヲ含ミ, 且ツX^*ガ有界集合デナイトスル。然ラバ$\|x_0\| = \beta$且ツ$f_0(x_0) > 1$ or $f_0(x_0) < -1$ナル$f_0 \in X^*$, $x_0 \in X^{*'}$ガ存在スル。$f_0(x_0) > 1$ノトキハ矛盾ダシ, 又$f(x_0) < -1$ノトキハ$f_0(-x_0) > 1$, $x_0 \in X^{*'}$カラ矛盾デアル.

$\boxed{6}$ Krein-Milman ハ Studia Math. 9(未着)デ, 有界ナ *reg. convex set* Kニハ *extreme point* ガ存在スル, ヲ証明シテ居ル. $f_0 \in K$ガKノ *extreme point* デアルト云フノハ如何ナル$g, h \in K$ニ対シテモ$f_0 \neq \frac{1}{2}(g+h)$ナルコトデアル。之ノ証明ガ「深宮氏」ニヨッテ得ラレタ.(本号深宮氏ノ談話ヲ見ラレタイ). *transfinite induction* ニヨル鮮カナ証明ダアル。

所デ若シEヲ $\boxed{\textit{separable}}$ ト仮定スルト, Mazur, loc. cit. ニヨリEノ原点ヲ内点トスル(強)閉凸集合$X^{*'}$ニハ必ズ切超平面ガ *unique* ナ *boundary point* ガ存在スル. 即チ$f_0(x_0)=1$

且ツ $x \in X^{*'}$ デ $f_0(x) \leqq 1$ ナル如キ $f_0 \in \bar{E}$ ガ唯一ツ定マル如キ $x_0 \in X^{*'}$ ガ存在スル。ヨッテ斯ル f_0 ハ reg. convex ナ X^* ノ extreme point ニナッテル。ダカラ reg. convex set ガ 0 ヲ含ムヤウニ移動シトイテ E separable ナ場合ハ Krein-Ŝmulian ノ定理ガ証明サレタコトニナル。然シ E separable デナイ場合，例ヘバ Banach 空間（M）ノ単位球ノ如ク表面上到ル所切超平面ガ unique ニナラナイ $X^{*'}$ ガ存在スルカラ，一般ノ場合ハ深宮氏ノ証明サレタヤウナ方法デヤラナイトイケナイ様デアル。深宮氏ノ証明ハ下圖ノ如キ切超平面ト求メラレタコトニナル訳デアラウ。(1)



$\boxed{7}$ Krein-Ŝmulian ノ Annals ノ論文ノ第1§ノ部分ハ上ノ interpretation デ殆ンド trivial —— 之ハ角谷君ノ手紙（前談話）ニモ functional トシテノ weak topology デ trivial トアリマシタ。中デ一番難シ相ナ。

K ⊂ Ē ガ reg. convex ニナルタメノ必充條件

---

(1) 兎ニ角 non-separable ナ場合ノ証明ハ transfinite ナ考ヘガドウシテモ必要ト思ハレル。

ハ，Kト任意ノ有界 reg. convex set トノ共通集合が全テ reg. convex ニナル事．

　トニフ定理ノ証明等モ上ノ duality カラ目ニ見エテル譯デス。